MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

16. ožujka 2014.

Analitička geometrija prostora

- Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$.

- Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Svaka točka T u prostoru jednoznačno je određena koordinatama (x, y, z)

- Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Svaka točka T u prostoru jednoznačno je određena koordinatama (x, y, z)
- To su ujedno skalarne komponente radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$:

$$T(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Udaljenost dviju točaka

- Neka su $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ i $T_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ dvije točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.

Udaljenost dviju točaka

- Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Tada je
$$d(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1 T_2}\right|.$$

Udaljenost dviju točaka

- Neka su $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Tada je
$$d\,(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1 T_2}\right|.$$
- Budući je
$$\overrightarrow{T_1 T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = (x_2 - x_1)\,\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\,\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\,\overrightarrow{k},$$

Udaljenost dviju točaka

- Neka su $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Tada je

$$d\,(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1 T_2}\right|.$$

- Budući je

$$\overrightarrow{T_1 T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = (x_2 - x_1)\,\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\,\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\,\overrightarrow{k},$$

- slijedi

$$d\,(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1 T_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke
- s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke
- s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu
- s dva pravca koja se sijeku

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke
- s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu
- s dva pravca koja se sijeku
- s dva paralelna pravca

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke
- s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu
- s dva pravca koja se sijeku
- s dva paralelna pravca
- <u>točkom $T_1 \in \Pi$ i vektorom $\overrightarrow{n}$ okomitim na ravninu Π.</u>

Zadavanje ravnine

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- s tri nekolinearne točke
- s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu
- s dva pravca koja se sijeku
- s dva paralelna pravca
- točkom $T_1 \in \Pi$ i vektorom $\overrightarrow{n}$ okomitim na ravninu Π.

Napomena

Vektor $\overrightarrow{n}$ *je okomit na ravninu* Π, *ako je okomit na svaki vektor iz te ravnine. Vektor* $\overrightarrow{n}$ *nazivamo* **normalom ravnine** Π.

Vektorska jednadžba ravnine

Neka je $T_1 \in \Pi$ i $\overrightarrow{n}$ normala ravnine Π i neka je $T \in \Pi$, $T \neq T_1$.

Vektorska jednadžba ravnine

Neka je $T_1 \in \Pi$ i $\overrightarrow{n}$ normala ravnine Π i neka je $T \in \Pi$, $T \neq T_1$.
Tada vektor $\overrightarrow{T_1 T}$ leži u Π, pa je

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{T_1 T}.$$

Vektorska jednadžba ravnine

Neka je $T_1 \in \Pi$ i $\overrightarrow{n}$ normala ravnine Π i neka je $T \in \Pi$, $T \neq T_1$.
Tada vektor $\overrightarrow{T_1 T}$ leži u Π, pa je

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{T_1 T}.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_1 T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1},$$

Vektorska jednadžba ravnine

Neka je $T_1 \in \Pi$ i $\overrightarrow{n}$ normala ravnine Π i neka je $T \in \Pi$, $T \neq T_1$.
Tada vektor $\overrightarrow{T_1 T}$ leži u Π, pa je

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{T_1 T}.$$

Budući je

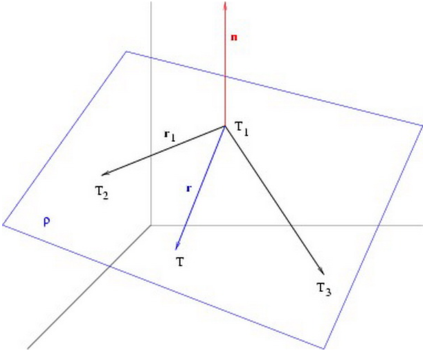
$$\overrightarrow{T_1 T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1},$$

slijedi

$$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) = 0$$

što je **vektorska jednadžba** ravnine Π.

Zadavanje ravnine



Opća jednadžba ravnine

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T(x, y, z)$, $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$.

Opća jednadžba ravnine

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$.
Tada je

$$\overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}\right) \cdot \left[\left(x - x_1\right)\overrightarrow{i} + \left(y - y_1\right)\overrightarrow{j} + \left(z - z_1\right)\overrightarrow{k}\right] = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x - x_1\right) + B\left(y - y_1\right) + C\left(z - z_1\right) = 0. \tag{4}$$

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T(x, y, z)$, $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$.
Tada je

$$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}\right) \cdot \left[(x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} + (z - z_1)\overrightarrow{k}\right] = 0$$

$$\Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{4}$$

Jednadžba (4) se naziva **<u>jednadžba ravnine kroz točku</u>** $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

Opća jednadžba ravnine

Iz (4) dobivamo

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_1 - By_1 - Cz_1)}_{D} = 0$$

Opća jednadžba ravnine

Iz (4) dobivamo

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_1 - By_1 - Cz_1)}_{D} = 0$$

Jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

se naziva **opća jednadžba ravnine**.

Opća jednadžba ravnine

Iz (4) dobivamo

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_1 - By_1 - Cz_1)}_{D} = 0$$

Jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

se naziva **opća jednadžba ravnine**.

Napomena

Normalu ravnine $\overrightarrow{n}$ određuje samo pravac (nosač), tj. ravnina se ne mijenja ako normali $\overrightarrow{n}$ promijenimo duljinu i orijetaciju.

Primjer

Nađite jednadžbu ravnine Π *koja prolazi točkom* $T(1,-2,1)$ *i čija je normala* $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

Primjer

Nađite jednadžbu ravnine Π *koja prolazi točkom* $T\,(1,-2,1)$ *i čija je normala* $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.
I način: Iz jednadžbe (4) dobivamo

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-(-2))+4\,(z-1)=0\Rightarrow$$

$$\Pi\ldots -x+y+4z-1=0$$

Opća jednadžba ravnine

Primjer

Nađite jednadžbu ravnine Π *koja prolazi točkom* $T\,(1,-2,1)$ *i čija je normala* $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

I način: Iz jednadžbe (4) dobivamo

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-(-2))+4\,(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Pi \ldots -x+y+4z-1=0$$

II način: Iz jednadžbe (5) dobivamo

$$-1\cdot x+1\cdot y+4\cdot z+D=0$$

$$T\in\Pi \Rightarrow -1\cdot 1+1\cdot(-2)+4\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow$$

$$\Pi \ldots -x+y+4z-1=0$$

Jednadžba ravnine kroz tri točke

- Neka su $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $T_3\,(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.

Jednadžba ravnine kroz tri točke

- Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Te tri točke određuju ravninu Π. Neka je $T(x, y, z) \in \Pi$, $T \neq T_1, T_2, T_3$.

Jednadžba ravnine kroz tri točke

- Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Te tri točke određuju ravninu Π. Neka je $T(x, y, z) \in \Pi$, $T \neq T_1, T_2, T_3$.
- Budući su vektori
$$\overrightarrow{T_1 T}, \ \overrightarrow{T_1 T_2}, \ \overrightarrow{T_1 T_3}$$
komplanarni (svi leže u Π), onda je mješoviti produkt
$$\left[\overrightarrow{T_1 T}, \ \overrightarrow{T_1 T_2}, \ \overrightarrow{T_1 T_3}\right] = 0.$$

Jednadžba ravnine kroz tri točke

- Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne točke u prostoru $\mathbf{E}^3$.
- Te tri točke određuju ravninu Π. Neka je $T(x, y, z) \in \Pi$, $T \neq T_1, T_2, T_3$.
- Budući su vektori
$$\overrightarrow{T_1T},\ \overrightarrow{T_1T_2},\ \overrightarrow{T_1T_3}$$
komplanarni (svi leže u Π), onda je mješoviti produkt
$$\left[\overrightarrow{T_1T},\ \overrightarrow{T_1T_2},\ \overrightarrow{T_1T_3}\right] = 0.$$
- Budući je
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_1T} &= (x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}, \\
\overrightarrow{T_1T_2} &= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}, \\
\overrightarrow{T_1T_3} &= (x_3 - x_1)\,\vec{i} + (y_3 - y_1)\,\vec{j} + (z_3 - z_1)\,\vec{k},
\end{aligned}$$

Opća jednadžba ravnine

- slijedi

$$\left[\overrightarrow{T_1 T}, \ \overrightarrow{T_1 T_2}, \ \overrightarrow{T_1 T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Opća jednadžba ravnine

- slijedi

$$\left[\overrightarrow{T_1T},\ \overrightarrow{T_1T_2},\ \overrightarrow{T_1T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

- Jednadžba (6) se naziva **jednadžba ravnine kroz tri točke**.

Opća jednadžba ravnine

- slijedi

$$\left[\overrightarrow{T_1 T},\ \overrightarrow{T_1 T_2},\ \overrightarrow{T_1 T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

- Jednadžba (6) se naziva **jednadžba ravnine kroz tri točke**.

Opća jednadžba ravnine

- slijedi

$$\left[\overrightarrow{T_1 T},\ \overrightarrow{T_1 T_2},\ \overrightarrow{T_1 T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

- Jednadžba (6) se naziva **jednadžba ravnine kroz tri točke**.

Primjer

Nađite jednadžbu ravnine Π *koja prolazi točkama* $T_1\left(1,0,0\right)$, $T_2\left(0,2,0\right)$, $T_3\left(0,0,-1\right)$.

Opća jednadžba ravnine

- slijedi

$$\left[\overrightarrow{T_1 T},\ \overrightarrow{T_1 T_2},\ \overrightarrow{T_1 T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

- Jednadžba (6) se naziva **jednadžba ravnine kroz tri točke**.

Primjer

Nađite jednadžbu ravnine Π *koja prolazi točkama* $T_1\,(1,0,0)$, $T_2\,(0,2,0)$, $T_3\,(0,0,-1)$.
Iz jednadžbe (6) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & -1-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \textit{(razvoj determinante)}$$

$$\Pi \ldots -2x - y + 2z + 2 = 0.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π.

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π. Ako je $D \neq 0$ dijeljenjem jednadžbe (5) s $-D$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\Pi \ldots \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{7}$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π. Ako je $D \neq 0$ dijeljenjem jednadžbe (5) s $-D$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\Pi \ldots \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{7}$$

Jednadžba (7) se naziva **segmentni oblik jednadžbe ravnine**.

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π. Ako je $D \neq 0$ dijeljenjem jednadžbe (5) s $-D$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\Pi \ldots \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{7}$$

Jednadžba (7) se naziva **segmentni oblik jednadžbe ravnine**.

Napomena

p, q, r su odresci ravnine Π na koordinatnim osima x, y, z, redom, tj. koordinatne osi x, y, z, probadaju ravninu u točkama $T_1\,(p, 0, 0)$, $T_2\,(0, q, 0)$, $T_3\,(0, 0, r)$, redom.

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Napomena

Ako ravnina prolazi ishodištem onda je $D = 0$ $(A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0)$ *pa ne postoji segmentni oblik ravnine.*

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Napomena

Ako ravnina prolazi ishodištem onda je $D = 0$ $(A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0)$ *pa ne postoji segmentni oblik ravnine.*

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-2x - y + 2z + 2 = 0$ *napišite u segmentnom obliku.*

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Napomena

Ako ravnina prolazi ishodištem onda je $D = 0$ $(A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0)$ *pa ne postoji segmentni oblik ravnine.*

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-2x - y + 2z + 2 = 0$ *napišite u segmentnom obliku.*

$$-2x - y + 2z + 2 = 0 / : (-2) \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Napomena

Ako ravnina prolazi ishodištem onda je $D = 0$ $(A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0)$ *pa ne postoji segmentni oblik ravnine.*

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-2x - y + 2z + 2 = 0$ *napišite u segmentnom obliku.*

$$-2x - y + 2z + 2 = 0 / : (-2) \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1.$$

Koordinatne osi x, y, z, *probadaju (sijeku) ravninu* Π *u točkama* $T_1\,(1, 0, 0)$, $T_2\,(0, 2, 0)$, $T_3\,(0, 0, -1)$ *redom.*

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-x + 2y + 2 = 0$ *napišite u segmentnom obliku.*

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-x+2y+2=0$ *napišite u segmentnom obliku.*

$$-x+2y+2=0 \big/ : (-2) \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-x+2y+2=0$ *napišite u segmentnom obliku.*

$$-x+2y+2=0/:(-2) \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1.$$

Koordinatne osi x, y, *probadaju (sijeku) ravninu* Π *u točkama* $T_1\left(2,0,0\right)$, $T_2\left(0,-1,0\right)$, *redom.*

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Primjer

Ravninu Π *zadanu jednadžbom* $-x + 2y + 2 = 0$ *napišite u segmentnom obliku.*

$$-x + 2y + 2 = 0 / : (-2) \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Koordinatne osi x, y, *probadaju (sijeku) ravninu* Π *u točkama* $T_1\left(2, 0, 0\right)$, $T_2\left(0, -1, 0\right)$, *redom.*
Ravnina Π *ne siječe os* z.

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Vektor $\overrightarrow{s}$ nazivamo **vektorom smjera** pravca.

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Vektor $\overrightarrow{s}$ nazivamo **vektorom smjera** pravca.
Neka je $T_0 \in p$ i $\overrightarrow{s}$ vektor smjera pravca p i neka je $T \in p$.

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Vektor $\overrightarrow{s}$ nazivamo **vektorom smjera** pravca.
Neka je $T_0 \in p$ i $\overrightarrow{s}$ vektor smjera pravca p i neka je $T \in p$.
Tada su vektori $\overrightarrow{T_0 T}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, pa postoji $t \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\overrightarrow{T_0 T} = t \overrightarrow{s}.$$

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Vektor $\overrightarrow{s}$ nazivamo **vektorom smjera** pravca.
Neka je $T_0 \in p$ i $\overrightarrow{s}$ vektor smjera pravca p i neka je $T \in p$.
Tada su vektori $\overrightarrow{T_0 T}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, pa postoji $t \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\overrightarrow{T_0 T} = t \overrightarrow{s}.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_0 T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_0} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0},$$

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- s dvije različite točke
- točkom $T_0 \in p$ i vektorom $\overrightarrow{s}$ s nosačem p.

Vektor $\overrightarrow{s}$ nazivamo **vektorom smjera** pravca.
Neka je $T_0 \in p$ i $\overrightarrow{s}$ vektor smjera pravca p i neka je $T \in p$.
Tada su vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, pa postoji $t \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\overrightarrow{T_0T} = t\,\overrightarrow{s}.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_0} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0},$$

onda je

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = t\,\overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\,\overrightarrow{s} \tag{8}$$

što je **vektorska jednadžba** pravca.

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\overrightarrow{s} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}$.

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\overrightarrow{s} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\,\overrightarrow{s} \Rightarrow$$

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T(x, y, z)$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{s} \Rightarrow$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k} + t\left(l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}\right) \Rightarrow$$

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T(x, y, z)$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{s} \Rightarrow$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k} + t\left(l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}\right) \Rightarrow$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = (x_0 + tl)\overrightarrow{i} + (y_0 + tm)\overrightarrow{j} + (z_0 + tn)\overrightarrow{k}$$

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\overrightarrow{s} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\,\overrightarrow{s} \Rightarrow$$

$$x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} + z_0\,\overrightarrow{k} + t\left(l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}\right) \Rightarrow$$

$$x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = \left(x_0 + tl\right)\overrightarrow{i} + \left(y_0 + tm\right)\overrightarrow{j} + \left(z_0 + tn\right)\overrightarrow{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{9}$$

Koordinatizacija pravca

Neka je $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{s} \Rightarrow$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k} + t\left(l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}\right) \Rightarrow$$

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = \left(x_0 + tl\right)\overrightarrow{i} + \left(y_0 + tm\right)\overrightarrow{j} + \left(z_0 + tn\right)\overrightarrow{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{9}$$

Jednadžba (9) je **parametarski oblik jednadžbe pravca**.

Kanonska jednadžba pravca

- Svakoj vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ u (9) odgovara jedna točka pravca.

Kanonska jednadžba pravca

- Svakoj vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ u (9) odgovara jedna točka pravca.
- Eliminacijom parametra t iz jednadžbi (9) (npr. $t = \frac{x-x_0}{l}$) dobivamo

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{10}$$

Kanonska jednadžba pravca

- Svakoj vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ u (9) odgovara jedna točka pravca.
- Eliminacijom parametra t iz jednadžbi (9) (npr. $t = \frac{x-x_0}{l}$) dobivamo

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{10}$$

- Jednadžba (10) je **kanonski oblik jednadžbe pravca**.

Kanonska jednadžba pravca

Primjer

Nađite pravac koji prolazi točkom $T_0\,(1,-3,0)$ *i ima vektor smjera* $\overrightarrow{s}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$.

Kanonska jednadžba pravca

Primjer

Nađite pravac koji prolazi točkom $T_0\,(1,-3,0)$ *i ima vektor smjera* $\overrightarrow{s} = 2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

Parametarski oblik jednadžbe pravca: $p \ldots \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3, \\ z = -t. \end{cases}$

Primjer

Nađite pravac koji prolazi točkom $T_0\,(1,-3,0)$ *i ima vektor smjera* $\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

Parametarski oblik jednadžbe pravca: $p \ldots \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3, \\ z = -t. \end{cases}$

Eliminacijom parametra t *dobivamo*

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-3)}{0} = \frac{z}{-1}$$

Kanonska jednadžba pravca

Primjer

Nađite pravac koji prolazi točkom $T_0\,(1,-3,0)$ *i ima vektor smjera* $\overrightarrow{s} = 2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

Parametarski oblik jednadžbe pravca: $p \ldots \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3, \\ z = -t. \end{cases}$

Eliminacijom parametra t dobivamo

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-3)}{0} = \frac{z}{-1}$$

Napomena

$\frac{y-(-3)}{0}$ *je samo formalni zapis!*

Pravac kroz dvije točke

- Neka su $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p.

Pravac kroz dvije točke

- Neka su $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p.
- Budući su $T_1,\ T_2 \in p$, vektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$ ima nosač p, tj. vektor $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2}$ je vektor smjera pravca p.

Pravac kroz dvije točke

- Neka su $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p.
- Budući su $T_1,\ T_2 \in p$, vektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$ ima nosač p, tj. vektor $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2}$ je vektor smjera pravca p.
- Budući je

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = (x_2 - x_1)\,\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\,\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\,\overrightarrow{k},$$

Pravac kroz dvije točke

- Neka su $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p.
- Budući su T_1, $T_2 \in p$, vektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$ ima nosač p, tj. vektor $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2}$ je vektor smjera pravca p.
- Budući je

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \left(x_2 - x_1\right) \overrightarrow{i} + \left(y_2 - y_1\right) \overrightarrow{j} + \left(z_2 - z_1\right) \overrightarrow{k},$$

- slijedi

$$p \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \left(x_2 - x_1\right) t, \\ y = y_1 + \left(y_2 - y_1\right) t, \\ z = z_1 + \left(z_2 - z_1\right) t, \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R},$$

Pravac kroz dvije točke

- Neka su $T_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $T_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p.
- Budući su T_1, $T_2 \in p$, vektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$ ima nosač p, tj. vektor $\vec{s} = \overrightarrow{T_1 T_2}$ je vektor smjera pravca p.
- Budući je

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \left(x_2 - x_1\right)\vec{i} + \left(y_2 - y_1\right)\vec{j} + \left(z_2 - z_1\right)\vec{k},$$

- slijedi

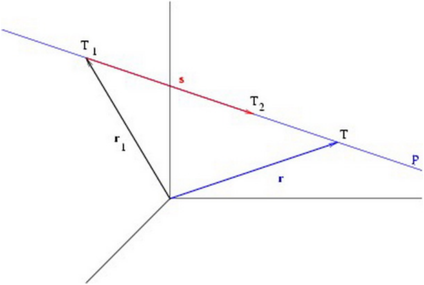
$$p \ldots \begin{cases} x = x_1 + \left(x_2 - x_1\right)t, \\ y = y_1 + \left(y_2 - y_1\right)t, \\ z = z_1 + \left(z_2 - z_1\right)t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

- ili

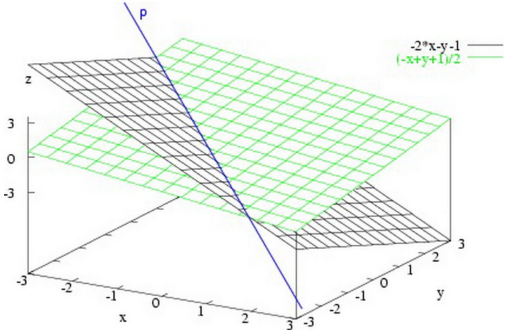
$$p \ldots \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

jednadžba pravca zadanog s dvije točke.

Pravac u prostoru



Pravac kao presjek dviju ravnina



Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:

Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:
  1. Π_1 i Π_2 se sijeku u pravcu p ($\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$);

Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:
  1. Π_1 i Π_2 se sijeku u pravcu p ($\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$);
  2. Π_1 i Π_2 su paralelne ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$);

Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:
  1. Π_1 i Π_2 se sijeku u pravcu p ($\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$);
  2. Π_1 i Π_2 su paralelne ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$);
  3. Π_1 i Π_2 se podudarju ($\Pi_1 \equiv \Pi_2$).

Pravac kao presjek dviju ravnina

- Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:
  1. Π_1 i Π_2 se sijeku u pravcu p ($\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$);
  2. Π_1 i Π_2 su paralelne ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$);
  3. Π_1 i Π_2 se podudarju ($\Pi_1 \equiv \Pi_2$).
- Analizom sustava

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z &= -D_2, \end{aligned}$$

dobivamo odgovor na gornje pitanje.

Pravac kao presjek dviju ravnina

- ako postoji jednoparametarsko rješenje (npr. x i y se daju izraziti preko z) $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se sijeku u pravcu p (parametarska jednadžba)

Pravac kao presjek dviju ravnina

- ako postoji jednoparametarsko rješenje (npr. x i y se daju izraziti preko z) $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se sijeku u pravcu p (parametarska jednadžba)

- $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}\right) \Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 su paralelne

Pravac kao presjek dviju ravnina

- ako postoji jednoparametarsko rješenje (npr. x i y se daju izraziti preko z) $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se sijeku u pravcu p (parametarska jednadžba)

- $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}\right) \Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 su paralelne

- $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}\right) \Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se podudarju

Primjer

Nađite paramerarsku jednadžbu pravca p zadanog kao presjek ravnina

$$p \ldots \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Pravac kao presjek dviju ravnina

Primjer

Nađite paramerarsku jednadžbu pravca p zadanog kao presjek ravnina

$$p \ldots \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Riješavamo sustav:

$$\begin{array}{c} x + y - z + 1 = 0, \\ y + 2z + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x - 3z = 0, \\ y + 2z + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 3z, \\ y = -2z - 1 \end{array}$$

Primjer

Nađite paramerarsku jednadžbu pravca p zadanog kao presjek ravnina

$$p \ldots \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Riješavamo sustav:

$$\begin{array}{c} x + y - z + 1 = 0, \\ y + 2z + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x - 3z = 0, \\ y + 2z + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 3z, \\ y = -2z - 1 \end{array}$$

Dobili smo parametarsku jednadžbu:

$$p \ldots \begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \textit{ili} \quad p \ldots \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Kut između pravaca

Kut između pravaca p_1 i p_2 je kut između njihovih vektora smjera $\overrightarrow{s}_1$ i $\overrightarrow{s_2}$

$$\varphi = \measuredangle\left(p_1, p_2\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2\right),$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|}$$

Kut između pravaca

Kut između pravaca p_1 i p_2 je kut između njihovih vektora smjera $\vec{s}_1$ i $\vec{s_2}$

$$\varphi = \measuredangle\left(p_1, p_2\right) = \measuredangle\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right),$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{\left|\vec{s_1}\right| \cdot \left|\vec{s_2}\right|}$$

Specijalni slučajevi:

- Ako je $p_1 \parallel p_2$ ili $p_1 \equiv p_2$ onda je $\vec{s_1} = \lambda \vec{s_2}$, tj. vrijedi

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Kut između pravaca

Kut između pravaca p_1 i p_2 je kut između njihovih vektora smjera $\overrightarrow{s}_1$ i $\overrightarrow{s_2}$

$$\varphi = \measuredangle(p_1, p_2) = \measuredangle(\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2),$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|}$$

Specijalni slučajevi:

- Ako je $p_1 \parallel p_2$ ili $p_1 \equiv p_2$ onda je $\overrightarrow{s_1} = \lambda \overrightarrow{s_2}$, tj. vrijedi

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

- Ako je $p_1 \perp p_2$ onda je $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, pa je $\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0$, tj. vrijedi

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Kut između ravnina

Kut između ravnina Π_1 i Π_2 je kut među njihovim normalama $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$:

$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right).$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

Kut između ravnina

Kut između ravnina Π_1 i Π_2 je kut među njihovim normalama $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$:

$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right).$$

pa je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

ili, ako je $\overrightarrow{n_1} = A_1 \overrightarrow{i} + B_1 \overrightarrow{j} + C_1 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n_2} = A_2 \overrightarrow{i} + B_2 \overrightarrow{j} + C_2 \overrightarrow{k}$,

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Kut između ravnina

Specijalni slučajevi:

- Ako je $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ ili $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ onda je $\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}$, tj. vrijedi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Kut između ravnina

Specijalni slučajevi:

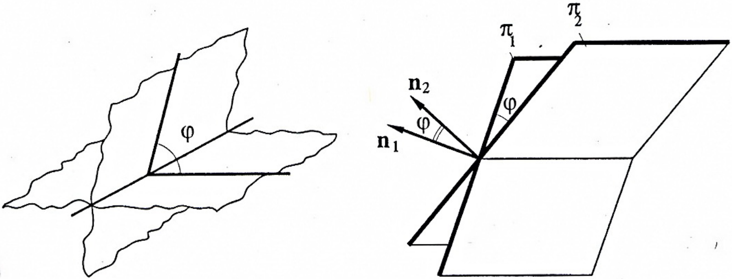
- Ako je $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ ili $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ onda je $\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}$, tj. vrijedi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

- Ako je $\Pi_1 \perp \Pi_2$ onda je $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ pa je $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$, tj. vrijedi

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Kut između ravnina



Sl. 6.13. Kut između dviju ravnina

Kut između pravca i ravnine

- Neka su zadani ravnina Π s normalom $\overrightarrow{n}$ i pravac p s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$.

Kut između pravca i ravnine

- Neka su zadani ravnina Π s normalom $\overrightarrow{n}$ i pravac p s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$.
- Kut između pravca i ravnine

$$\psi = \measuredangle\left(\Pi, p\right)$$

je najmanji kut što ga vektor smjera $\overrightarrow{s}$ pravca p zatvara s nekim vektorom u ravnini Π.

Kut između pravca i ravnine

- Neka su zadani ravnina Π s normalom $\overrightarrow{n}$ i pravac p s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$.
- Kut između pravca i ravnine

$$\psi = \measuredangle\left(\Pi, p\right)$$

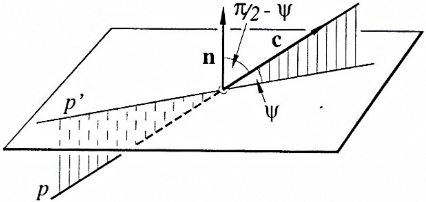
je najmanji kut što ga vektor smjera $\overrightarrow{s}$ pravca p zatvara s nekim vektorom u ravnini Π.
- Ako je pravac p' projekcija pravca p u ravninu Π onda definiramo

$$\psi =: \measuredangle\left(p, p'\right), \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Kut između pravca i ravnine

- Neka su zadani ravnina Π s normalom $\overrightarrow{n}$ i pravac p s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$.
- Kut između pravca i ravnine
$$\psi = \measuredangle\left(\Pi, p\right)$$
je najmanji kut što ga vektor smjera $\overrightarrow{s}$ pravca p zatvara s nekim vektorom u ravnini Π.
- Ako je pravac p' projekcija pravca p u ravninu Π onda definiramo
$$\psi =: \measuredangle\left(p, p'\right), \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}.$$
- Budući je
$$\frac{\pi}{2} - \psi = \measuredangle\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}\right)$$
slijedi
$$\sin\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{s}|}$$

Kut između pravca i ravnine



Sl. 6.14. Kut između pravca i ravnine

Kut između pravca i ravnine

- Ako je $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$

$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Kut između pravca i ravnine

- Ako je $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$
$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$
- Ako je $p \perp \Pi$ onda je projekcija pravca p u ravninu Π točka, pa definiramo:
$$p \perp \Pi \Rightarrow \psi = \measuredangle(\Pi, p) =: \frac{\pi}{2}.$$

Kut između pravca i ravnine

- Ako je $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$
$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$
- Ako je $p \perp \Pi$ onda je projekcija pravca p u ravninu Π točka, pa definiramo:
$$p \perp \Pi \Rightarrow \psi = \measuredangle(\Pi, p) =: \frac{\pi}{2}.$$
- Specijalni slučajevi:

Kut između pravca i ravnine

- Ako je $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$

$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

- Ako je $p \perp \Pi$ onda je projekcija pravca p u ravninu Π točka, pa definiramo:

$$p \perp \Pi \Rightarrow \psi = \measuredangle(\Pi, p) =: \frac{\pi}{2}.$$

- Specijalni slučajevi:
- Ako je $p \parallel \Pi$, onda je $\psi = 0$ pa je $\measuredangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}) = \frac{\pi}{2}$, tj. vrijedi $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s} = 0$ ili

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Kut između pravca i ravnine

- Ako je $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{s} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$
$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$
- Ako je $p \perp \Pi$ onda je projekcija pravca p u ravninu Π točka, pa definiramo:
$$p \perp \Pi \Rightarrow \psi = \measuredangle(\Pi, p) =: \frac{\pi}{2}.$$
- Specijalni slučajevi:
- Ako je $p \parallel \Pi$, onda je $\psi = 0$ pa je $\measuredangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}) = \frac{\pi}{2}$, tj. vrijedi $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s} = 0$ ili
$$Al + Bm + Cn = 0.$$
- Ako je $p \perp \Pi$, onda je $\psi = \frac{\pi}{2}$ pa je $\measuredangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{s}) = 0$, tj. onda su $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, tj. vrijedi $\overrightarrow{n} = \lambda\overrightarrow{s}$ ili
$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Kut između pravca i ravnine

Primjer

Nađite točku u kojoj pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

probada ravninu

$$\Pi \ldots -2x + 2y - 2z - 1 = 0,$$

te kut između Π *i* p.

Kut između pravca i ravnine

Primjer

Nađite točku u kojoj pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

probada ravninu

$$\Pi \ldots -2x + 2y - 2z - 1 = 0,$$

te kut između Π *i* p.
Parametarska jednadžba pravca je

$$p \ldots \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = t, \end{cases}$$

Kut između pravca i ravnine

Primjer

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine dobivamo

$$-2\,(t+1)+2\,(-1-t)-2t-1=0\Rightarrow t=-\frac{5}{6}.$$

Kut između pravca i ravnine

Primjer

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine dobivamo

$$-2\left(t+1\right)+2\left(-1-t\right)-2t-1=0\Rightarrow t=-\frac{5}{6}.$$

Dakle, za vrijednost parametra $t=-\frac{5}{6}$*, dobivamo točku*

$$P\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

u kojoj pravac p *probada ravninu* Π.

Primjer

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine dobivamo

$$-2\,(t+1)+2\,(-1-t)-2t-1=0 \Rightarrow t=-\frac{5}{6}.$$

Dakle, za vrijednost parametra $t=-\frac{5}{6}$, *dobivamo točku*

$$P\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

u kojoj pravac p *probada ravninu* Π.
Budući je $\overrightarrow{n}=-2\,\overrightarrow{i}+2\,\overrightarrow{j}-2\,\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, *slijedi*

$$\overrightarrow{n}=-2\overrightarrow{s},$$

pa su $\overrightarrow{n}$ *i* $\overrightarrow{s}$ *kolinearni (* $\psi=\frac{\pi}{2}$*), tj.* $p\perp\Pi$.